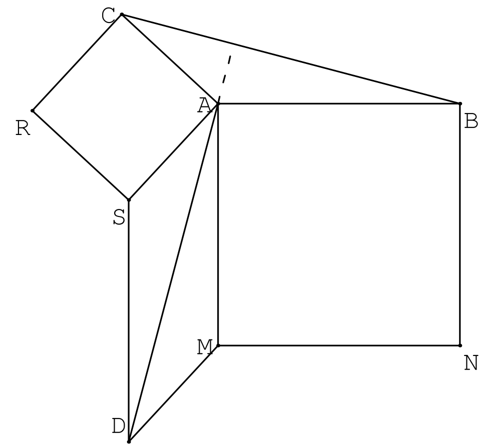
ENONCE : On considère un triangle ABC tel que l'angle ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$) = α compris entre 0 et π. On construit extérieurement au triangle ABC, les carrés ACRS et BAMN ainsi que le parallélogramme MASD. Montrer que les droites (AD) et (CB) sont perpendiculaires et que AD = BC.



CORRIGE : On considère le repère orthonormé (A, $\vec{u}, \vec{v}$) et les nombres complexes *b, c, d, m, n, r, s* affixes respectives des points B, C, D, M, N, R, S. On considère la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; par les carrés ACRS et BAMN on a : B est l'image de M et S est l'image de C ; donc $b = e^{i\frac{\pi}{2}}m$ et $s = e^{i\frac{\pi}{2}}c$, et donc $b = im$ et $s = ic$.

Comme $b = im$, on obtient $m = -ib$. Comme MASD est un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AD}$ soit $m + s = d$,

d'où $d = -ib + ic = i(c - b)$. Ainsi, $|d| = |c - b|$, soit AD = BC et

Arg(d) = Arg($i(c - b)$) = Arg(i) + Arg($c - b$) = $\frac{\pi}{2}$ + Arg($c - b$). D'où

Arg(d) - Arg($c - b$) = $\frac{\pi}{2}$ et $Arg(\frac{d}{c-b}) = Arg(\frac{d-a}{c-b}) = \frac{\pi}{2}$. Donc

($\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$) = $\frac{\pi}{2}$ et les droites (AD) et (CB) sont perpendiculaires.