

ENONCE : Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \overset{1}{u}, \overset{1}{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = -2\sqrt{3} - 2i$ et $b = -2\sqrt{3} + 2i$.

a) Calculer les distances OA, OB et AB. En déduire la nature du triangle OAB.

b) On désigne par C l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe c du point C.

c) On désigne par D l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2. Déterminer l'affixe d du point D.

d) Placer les points A, B, C, D sur une figure (unité graphique : 1 cm).

e) Préciser la nature du triangle BCD en la justifiant.

f) Soit E le symétrique de D par rapport à I, milieu de [BC]. Montrer que le point E est l'image de C dans la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

CORRIGE : a) $OA = |a| = 4$, $OB = |b| = 4$ et $AB = |b - a| = 4$. Donc le triangle OAB est équilatéral.

b) On a $c = e^{i\frac{\pi}{3}}a = e^{i\frac{\pi}{3}} \times 4e^{i\frac{5\pi}{6}} = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = 4i$.

c) On a $d = 2a = -4\sqrt{3} - 4i$.

d) ci-contre :

e) Le triangle BCD est équilatéral ;

en effet : $DC = BD = BC = 4\sqrt{3}$.

f) Le point I a pour affixe $\frac{b+c}{2} = -\sqrt{3} - i$; le point E est l'image de

D par l'homothétie de centre I et de rapport -1, d'où son affixe e vérifie $e + \sqrt{3} + i = -1(d + \sqrt{3} + i)$, d'où $e = 2\sqrt{3} + 2i$. L'image de

C dans la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a une affixe e' vérifiant

$e' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(c - b)$ d'où

$e' = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \sqrt{3} - 6i + 2\sqrt{3} + 2i = 2\sqrt{3} + 2i = e$. Donc E est bien l'image de C dans la rotation de centre B et

d'angle $\frac{\pi}{3}$.

