ENONCE : 1. On considère le polynôme P(z) = $z^4+8z^3+24z^2+32z+20$ où z est un nombre complexe. Déterminer les nombres réels a et b tels que P(z) = $(z^2+az+b)(z^2+2z+2)$. Résoudre dans **C** l'équation P(z) = 0.

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{u},\vec{v}$) (unité graphique : 2 cm) et on considère les points B, C, D, E d'affixes respectives $b = -1 + i$, $c = -1 - i$, $d = -3 - i$, $e = -3 + i$.
Montrer que le quadrilatère BCDE est un carré.
3. On considère le cercle Γ de centre O et passant par B. a) Déterminer une équation de Γ.
Soit Q un point de Γ distinct de B et C. L'affixe de Q est $z = x + iy$. Soient F et G les points du plan, d'affixes f et g, tels que QBFG soit un carré de sens direct, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{QB},\overrightarrow{QG}) = +\frac{\pi}{2}$. On pose $Z = \frac{g-q}{b-q}$.

b) Interpréter géométriquement le module et un argument de Z. En déduire Z.
c) Montrer que $g = (-1 + x + y) + i(-1 - x + y)$. En déduire le module de g en fonction de x et de y.
d) En utilisant la question 3 a), exprimer le module $|g|$ en fonction de x.
e) Exprimer $g + 1 + i$ en fonction de x et de y. En déduire le lieu de G lorsque Q décrit le cercle Γ.
f) A l'aide de considérations géométriques, montrer que $|f| = |g|$.
g) Pour quelles valeurs de x et de y les points D, E, F, G sont-ils sur un même cercle de centre O ? Préciser le rayon de ce cercle.

CORRIGE : 1. On a $(z^2+az+b)(z^2+2z+2) = z^4+(2+a)z^3+(2+2a+b)z^2+(2a+2b)z+2b$ et par identification, il vient $2 + a = 8$, $2 + 2a + b = 24$, $2a + 2b = 32$, $2b = 20$; on trouve $a = 6$ et $b = 10$; pour résoudre dans **C** l'équation P(z) = 0 il suffit de résoudre les deux équations $z^2+6z+10=0$ et $z^2+2z+2=0$; on trouve les quatre solutions complexes : $b = -1 + i$, $c = -1 - i$, $d = -3 - i$, $e = -3 + i$.
2. On a $c - b = -2i = d - e$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont égaux et BCDE est un parallélogramme ; de plus $|c-b| = |d-c| = 2$ et $(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BC}) = arg\left(\frac{c-b}{e-b}\right) = arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; BCDE a deux côtés adjacents de même longueur et perpendiculaires donc c'est un carré.
3. a) Déterminer une équation de Γ : pour tout point M(x ; y) du cercle Γ, on a OM = OB = $|b| = \sqrt{2}$. D'où l'équation de Γ : $x^2 + y^2 = 2$.
b) Le module de Z est $\left|\frac{g-q}{b-q}\right| = \frac{QG}{QB} = 1$ et un argument de Z est $arg\left(\frac{g-q}{b-q}\right) = (\overrightarrow{QB},\overrightarrow{QG}) = \frac{\pi}{2}$ puisque QBFG est un carré. Donc $Z = i$.
c) Ainsi $\frac{g-q}{b-q} = i$ d'où $g = (b-q)i+q = (-1 + x + y) + i(-1 - x + y)$.
$|g| = \sqrt{(-1+x+y)^2+(-1-x+y)^2} = \sqrt{2x^2+2(y-1)^2}$.
d) D'après la question 3 a), le point Q(x ; y) étant sur Γ, on a $x^2 = 2 - y^2$; d'où $|g| = \sqrt{2(2-y^2)+2(y-1)^2} = \sqrt{6-4y}$.
e) On a $g + 1 + i = (x + y) + i(-x + y)$. D'où $|g + 1 + i| = \sqrt{(x+y)^2 + (-x+y)^2} = \sqrt{2(x^2+y^2)} = 2$;
donc GC = 2 et, lorsque Q décrit le cercle Γ, le point G est sur le cercle de centre C et de rayon 2.
f) A l'aide de considérations géométriques : les points B et Q sont sur le cercle Γ centré en O, donc la médiatrice de [BQ] passe par O ; de plus, BQFG étant un carré, la médiatrice de [BQ] est aussi celle de [FG] ; donc O est sur la médiatrice de [FG] et donc OF = OG soit $|f| = |g|$.
g) Les points D, E, F, G sont sur un même cercle de centre O si OG = OD = $|d| = \sqrt{10} = |g| = \sqrt{6-4y}$; soit $6 - 4y = 10$; soit $y = -1$ et $x = 1$ ou $x = -1$; si Q a pour coordonnées (1 ; -1), F = D et si Q a pour coordonnées (-1 ; -1), F = E et G = D . Le rayon du cercle est $|d| = \sqrt{10}$.