

A. Quelques propriétés du nombre d'or :

On considère le nombre réel $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (appelé nombre d'or) ;

1) Montrer que $\phi^2 = \phi + 1$; $\frac{1}{\phi} = \phi - 1$; $\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}$.

2) Exprimer ϕ^3 et ϕ^4 en fonction de ϕ . Pour tout entier naturel n , peut-on exprimer ϕ^n en fonction de ϕ ?

B. Etude d'une suite :

Soit la fonction f définie sur $] -1 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1+2x}{1+x}$.

On considère alors la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Etudier la fonction f sur $] -1 ; +\infty[$ (limites aux bornes, éventuelles asymptotes, variations).
- 2) Représenter, dans un repère orthonormé $(O ; i, j)$ (unité graphique : 4 cm), la fonction f , la droite (d) d'équation $y = x$ et la représentation graphique en chemin de la suite (u_n) (jusqu'au terme u_5).
- 3) La suite (u_n) semble-t-elle monotone ? semble-t-elle convergente ? Si oui, quelle peut être sa limite ?
- 4) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$.
- 5) Montrer que, pour tout x de $[1 ; +\infty[$, on a $f(x) - \phi = \frac{(3-\sqrt{5})(x-\phi)}{2(1+x)}$.
- 6) En déduire que, pour tout x de $[1 ; +\infty[$, on a $|f(x) - \phi| < \frac{1}{4}|x - \phi|$.
- 7) Montrer que, pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \phi| < \frac{1}{4}|u_n - \phi|$.
- 8) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $|u_n - \phi| < \frac{1}{4^n}$.
- 9) En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n) .

C. La suite de Fibonacci et une suite associée:

On considère la suite de Fibonacci : c'est la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$, $w_1 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$w_{n+2} = w_{n+1} + w_n.$$

- 1) Calculer les 6 premiers termes de cette suite.
- 2) On considère alors la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{w_{n+1}}{w_n}$. Calculer les 5 premiers termes de cette suite ainsi que leurs valeurs approchées au millièmè.
- 3) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $v_{n+1} = f(v_n)$; en déduire la convergence et la limite de la suite (v_n) .