**CORRECTION DEVOIR MAISON N° 1 TERMINALE S**

A. 1) Le point M' n'est pas défini lorsque P n'existe pas, c'est-à-dire lorsque les droites (BI) et (CM) sont parallèles ; le point M est alors sur la parallèle à (BI) passant par C ; l'équation de la droite (BI) dans le repère orthonormé (A, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ ) est $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$ ; et celle de la droite (CM) est , lorsque M ≠ B ( $t \neq 1$ ) , $y = \frac{x-t}{1-t}$ ; ces deux droites sont parallèles si leur coefficient directeur sont égaux, soit $\frac{1}{1-t} = \frac{3}{4}$ , d'où $t = \frac{7}{3}$ ; le point R a pour coordonnées ( $\frac{7}{3}$ ; 0).

2)a) Le point P étant à l'intersection des droites (BI) et (CM), ses coordonnées vérifient l'équation des deux droites, d'où son abscisse vérifie $-\frac{3}{4}x + \frac{3}{4} = \frac{x-t}{1-t}$ et on trouve $x_P = \frac{t+3}{7-3t}$ ; son ordonnée est $y_P = 3\left(\frac{1-t}{7-3t}\right)$. Le point H étant le projeté de P sur (AD), les coordonnées de H sont (0 ; $3\left(\frac{1-t}{7-3t}\right)$) ; la droite (HM') étant parallèle à (BD), son coefficient directeur est -1 et a pour équation : $y = -x + y_H$ ; comme M' est sur l'axe des abscisses, son ordonnée est nulle, d'où $t' = x_{M'} = y_H = 3\left(\frac{1-t}{7-3t}\right)$ . Lorsque M = B ( $t$ = 1), on a M' = A et $t'$ = 0 .

b) M = M' si $t' = t = 3\left(\frac{1-t}{7-3t}\right)$ ; d'où l'équation $3t^2 - 10t + 3 = 0$ ; de solutions {3 ; $\frac{1}{3}$ }. Donc E( $\frac{1}{3}$ ; 0) et F(3 ; 0).

c) M' est sur [AM] si $0 \leq t' \leq t$ ou $t \leq t' \leq 0$ , soit les inéquations : (1) : $0 \leq 3\left(\frac{1-t}{7-3t}\right) \leq t$ et (2) : $t \leq 3\left(\frac{1-t}{7-3t}\right) \leq 0$ .

L'inéquation (1) est équivalente à $\frac{3t^2 - 10t + 3}{7-3t} \leq 0$ et $t \geq 0$ et $3\left(\frac{1-t}{7-3t}\right) \geq 0$; On résout ces inéquations à l'aide de tableaux de signes et on trouve : $t \in [1/3 ; 1] \cup [3 ; +\infty[$ . L'inéquation (2) se résout de la même manière et ne donne aucune solution. Donc les points M tels que M' ∈ [AM] sont ceux du segment [EB] et de la demi droite [Fx).

3)a) Variations de $f$ : $f'(t) = \frac{-12}{(7-3t)^2} < 0$, donc la fonction $f$ est décroissante sur ]-∞ ; 7/3[ et sur ]7/3 ; +∞[.

Limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \to 7/3^+} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x \to 7/3^-} f(x) = -\infty$ .

On a donc deux asymptotes à $C_f$ : une asymptote verticale d'équation $x = 7/3$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 1$. On montre que le point S(7/3 ; 1) est un centre de symétrie de $C_f$ .

c) Résolution d'inéquation déjà traitée dans la question 2)c).

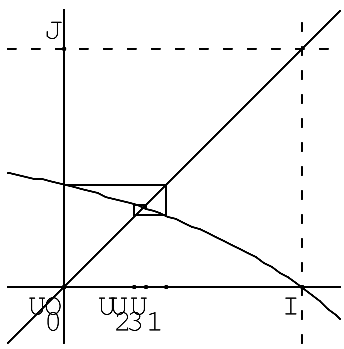
Si M ∈ [AB] alors $t \in [0 ; 1]$ ; donc $0 \leq 1 - t \leq 1$ et $4 \leq 7 - 3t \leq 7$ , donc $0 \leq f(t) \leq$ ¾ < 1 donc M' ∈ [AB].

B. Etude de la suite :a)

b) On a $t_1 > t_0$ et $t_2 < t_1$ , etc et la suite n'est pas monotone.

D'après le dessin la suite converge vers l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ et la courbe $C_f$ , qui vaut 1/3 (abscisse du point E).

2)a) On a $u_{n+1} = \frac{t_{n+1} - \frac{1}{3}}{t_{n+1} - 3} = \frac{3(\frac{1-t_n}{7-3t_n}) - \frac{1}{3}}{3(\frac{1-t_n}{7-3t_n}) - 3} = \frac{2-6t_n}{3(-18+6t_n)} = \frac{-6(t_n - \frac{1}{3})}{18(t_n - 3)} = \frac{-1}{3}u_n$ et




donc $(u_n)$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{9}$ .

b) On a donc $u_n = \frac{1}{9}\left(\frac{-1}{3}\right)^n$ puis $t_n = \frac{3u_n - \frac{1}{3}}{u_n - 1} = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)^n - \frac{1}{3}}{\frac{1}{9}\left(\frac{-1}{3}\right)^n - 1}$ .

c) On sait que $\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = 0$ donc la suite $(t_n)$ converge vers $\frac{1}{3}$ .