ENONCE :

1. a) Tracer dans un même repère orthonormé les courbes C et C' d'équations respectives $y = e^{x}$ et $y = e^{-x}$.

b) Soit α un réel quelconque ; T et T' sont les tangentes en α à, respectivement C et C'.
Montrer que T et T' sont perpendiculaires (Propriété P1).

c) On note H le point de coordonnées (α ; 0) et B et B' les points d'intersection de T et T' avec l'axe des abscisses.
Montrer que H est le milieu de [BB'] (Propriété P2). Représenter T, T', B, B' et H pour α = 2.

2. *Généralisation* : On considère une fonction *f* dérivable sur IR, et les courbes C et C' d'équation *y = f(x)* et *y = f(-x).*

a) Montrer que la fonction *f* vérifie la propriété P1 si $f'(\alpha)\times f'(-\alpha)=1$ pour tout α tel que *f* '(α) ≠ 0.

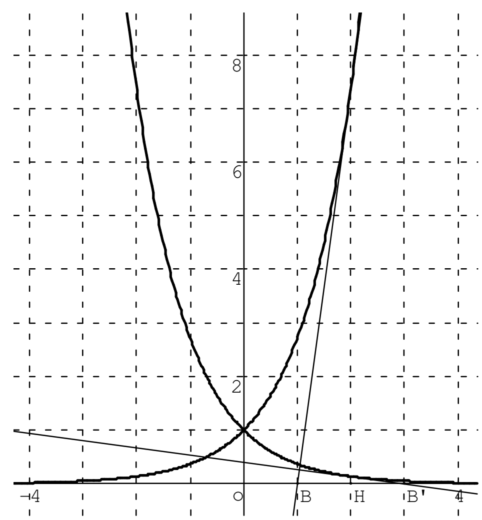
b) Montrer que la fonction *f* vérifie la propriété P2 si $f(\alpha)\times f'(-\alpha) = f(-\alpha)\times f'(\alpha)$ pour tout α tel que *f* '(α) ≠ 0.

c) Montrer que cette dernière propriété est équivalente à $f(\alpha)\times f(-\alpha)=k$ pour tout α tel que *f* '(α) ≠ 0 et où *k* est une constante réelle.

d) Trouver une condition sur les réels *a* et *b* pour que les fonctions *f* de la forme $f(x)=ae^{bx}$ possèdent les propriétés P1 et P2.

e) Déterminer les réels *a, b* et *c* pour que les fonctions *f* de la forme $f(x)=ae^{bx+c}$ possèdent les propriétés P1 et P2.

CORRIGE :



1. b) L'équation de T est : $y=e^{\alpha}x+e^{\alpha}(1-\alpha)$ et l'équation de T' est : $y=-e^{-\alpha}x+e^{-\alpha}(1+\alpha)$; le produit des coefficients directeurs de ces deux droites = $e^{\alpha}(-e^{-\alpha})=-1$ donc ces deux droites sont perpendiculaires.

c) Coordonnées de B(α - 1 ; 0) et B'(1+ α ; 0) ; les coordonnées du milieu de [BB'] sont (α ; 0) , donc H est le milieu de [BB'].

2. a) L'équation de T : $y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ et l'équation de T' : $y=-f'(-\alpha)(x-\alpha)+f(-\alpha)$; le produit des coefficients directeurs de ces deux droites = $-f'(\alpha)f'(-\alpha)$ donc ces deux droites sont perpendiculaires si $-f'(\alpha)f'(-\alpha)=-1$ soit $f'(\alpha)f'(-\alpha)=1$ et $f'(\alpha)\neq 0$.

b) Si $f'(\alpha)\neq 0$, les coordonnées de B sont ($\dfrac{-f(\alpha)}{f'(\alpha)}+\alpha$; 0) et B'($\dfrac{f(-\alpha)}{f'(-\alpha)}+\alpha$; 0) ; les coordonnées du milieu de [BB'] sont ($\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f(-\alpha)}{f'(-\alpha)}+\alpha+\dfrac{-f(\alpha)}{f'(\alpha)}+\alpha\right)$; 0) , donc H est le milieu de [BB'] si $\dfrac{f(-\alpha)}{f'(-\alpha)}+\dfrac{-f(\alpha)}{f'(\alpha)}=0$ soit $f(\alpha)\times f'(-\alpha)=f(-\alpha)\times f'(\alpha)$.

c) Si $f(\alpha)\times f(-\alpha)=k$ pour tout α tel que *f* '(α) ≠ 0, alors en dérivant comme fonction de α, on obtient $f(-\alpha)\times f'(\alpha)-f(\alpha)\times f'(-\alpha)=0$ soit $f(\alpha)\times f'(-\alpha)=f(-\alpha)\times f'(\alpha)$. Réciproquement, on sait que $(f(-x))'=-f'(-x)$; ainsi, si $f(\alpha)\times f'(-\alpha)=f(-\alpha)\times f'(\alpha)$ pour tout α tel que *f* '(α) ≠ 0 alors $f(-\alpha)\times f'(\alpha)-f(\alpha)\times f'(-\alpha)=0$; le membre de droite est une dérivée de la forme *u'v + uv'* , dérivée nulle, donc la fonction est constante : $f(\alpha)\times f(-\alpha)=k$.

d) Les fonctions *f* de la forme $f(x)=ae^{bx}$ possèdent la propriété P1 si $f'(\alpha)f'(-\alpha)=1$, soit $abe^{b\alpha}\times abe^{-b\alpha}=(ab)^2=1$; et possèdent la propriété P2 si $f(\alpha)\times f(-\alpha)=k$, soit $ae^{b\alpha}\times ae^{-b\alpha}=a^2=k$ (toujours vérifiée) ; donc la condition est que $(ab)^2=1$, soit *a* et *b* non nuls et $b=\dfrac{1}{a}$ ou $b=-\dfrac{1}{a}$.

e) Les fonctions *f* de la forme $f(x)=ae^{bx+c}$ possèdent la propriété P1 si $f'(\alpha)f'(-\alpha)=1$, soit $abe^{b\alpha+c}\times abe^{-b\alpha+c}=(abe^{c})^2=1$; et possèdent la propriété P2 si $f(\alpha)\times f(-\alpha)=k$, soit $ae^{b\alpha+c}\times ae^{-b\alpha+c}=(ae^{c})^2=k$ (toujours vérifiée) ; donc la condition est que $(abe^{c})^2=1$.