ENONCE : La fonction f est définie sur IR par $f(x)=(1-2x)e^{2x}$. On note $f^{(1)}=f'$, $f^{(2)}=f''$, $f^{(3)}, f^{(4)},...$ les dérivées successives de *f*.

1. Déterminer $f^{(2)}$ et $f^{(3)}$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$.

3. Pour tout entier n non nul, la courbe représentative de $f^{(n)}$ admet une tangente horizontale en un point noté M_n.

a) Calculer les coordonnées x_n et y_n de M_n et vérifier que les points M_n appartiennent à la courbe Γ d'équation $y=\dfrac{e^{2x}}{4^x}$.

b) Démontrer que la suite (x_n) est une suite arithmétique. Quelle est la limite de cette suite ?

c) Démontrer que la suite (y_n) est une suite géométrique. Etudier la limite de cette suite ?

CORRIGE : 1. $f'(x) = (-4x)e^{2x}$, $f^{(2)}(x)=(-4-8x)e^{2x}$ et $f^{(3)}(x)=(-16-16x)e^{2x}$.

2. Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$: pour $n = 1$, la propriété est vraie. Supposons que pour un n, $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$ et montrons que $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x}=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$: On a $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)})'(x)=2^n(-2)e^{2x}+2^n(1-n-2x)2e^{2x}=2^n(-2+2-2n-4x)e^{2x}=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}$. D'où la récurrence...

3. a) La courbe représentative de $f^{(n)}$ a une tangente horizontale en $M_n(x_n\ ;\ y_n)$ si $f^{(n+1)}(x_n)=0$ et $f^{(n)}(x_n)=y_n$; On a $f^{(n+1)}(x)=2^{n+1}(-n-2x)e^{2x}=0$ si $x=-\dfrac{n}{2}$, donc $x_n=-\dfrac{n}{2}$ et $y_n=f^{(n)}(x_n)=2^n(e^{-n})$

a) On a pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{e^{2x_n}}{4^{x_n}}=\dfrac{e^{-n}}{4^{\frac{-n}{2}}}=\dfrac{e^{-n}}{2^{-n}}=2^n e^{-n}=y_n$, donc les points M_n appartiennent bien à la courbe Γ d'équation $y=\dfrac{e^{2x}}{4^x}$.

b) On a $x_n=-\dfrac{n}{2}$, donc la suite (x_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$. Cette suite tend vers $-\infty$.

c) On a $y_n=2^n e^{-n}=\left(\dfrac{2}{e}\right)^n$, donc la suite (y_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{e}$. La raison $\dfrac{2}{e}$ est strictement comprise entre 0 et 1 donc la limite de cette suite est 0.