

ENONCE : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x - 1)e^x$. On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, ... les dérivées successives de f .

1. Calculer pour tout réel x , f' et $f^{(2)}$.

2. a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ avec $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = b_n + a_n$.

b) Déduisez-en que a_n et b_n sont des entiers relatifs.

3. On se propose dans cette question d'exprimer a_n et b_n en fonction de n .

a) Vérifier que la suite a_n est une suite arithmétique. Déduisez-en a_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.

b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$: $b_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1$. Déduisez-en b_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.

CORRIGE : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x - 1)e^x$. On note $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)}$, $f^{(4)}$, ... les dérivées successives de f .

1. $f'(x) = (x^2 + 3x)e^x$, $f''(x) = (x^2 + 5x + 3)e^x$.

2. a) Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ avec $a_n = a_{n-1} + 2$ et $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$: pour $n = 1$, on a $f'(x) = (x^2 + 3x)e^x$ donc avec $a_1 = 3 = a_0 + 2$ et $b_1 = 0 = a_0 + b_0$, donc la propriété est vraie pour $n = 1$. Supposons que pour un $n \geq 1$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ avec $a_n = a_{n-1} + 2$ et $b_n = b_{n-1} + a_{n-1}$ et montrons que $f^{(n+1)}(x) = (x^2 + a_{n+1} x + b_{n+1})e^x$ avec $a_{n+1} = a_n + 2$ et $b_{n+1} = b_n + a_n$:

$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' = (2x + a_n)e^x + (x^2 + a_n x + b_n)e^x = (x^2 + (a_n + 2)x + (b_n + a_n))e^x$. La récurrence est bien démontrée...

b) $a_1 = 3$, $b_1 = 0$ et $a_{n+1} = a_n + 2$, $b_{n+1} = b_n + a_n$; on montre par récurrence que pour tout $n \geq 1$, a_n et b_n sont des entiers relatifs : la somme de deux entiers relatifs est un entier relatif ...

3. a) On a $a_1 = 3$ et $a_{n+1} = a_n + 2$ donc la suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 2 ; pour tout $n \geq 1$, $a_n = 2(n-1) + 3 = 2n + 1$.

b) On a, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2} + b_{n-2} = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + b_{n-3} = \\ &= \dots = a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + b_1. \text{ Comme } b_1 = 0, \text{ on a bien} \\ b_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1. \end{aligned}$$

Donc b_n est égale à la somme des $n-1$ premiers termes d'une suite arithmétique, donc, pour tout $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{n-1}{2}(a_{n-1} + a_1) = \frac{n-1}{2}(2(n-1) + 1 + 3) = n^2 - 1.$$

