ENONCE : Soit le repère orthonormal direct (O ; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$) dans l'espace. On considère les points A(2 ; −1 ; 0), B(0 ; 3 ; −4), D(4 ; 1 ; 1) et S(−2 ; 1 ; 4).

a) Montrer que les points A,B et D ne sont pas alignés.

b) Déterminer les coordonnées du point C pour que ABCD soit un parallélogramme.

c) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère ABCD ?

d) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AS}$. En déduire une équation du plan (ABD).

e) La droite (d) passe par D et est parallèle à (AS). Déterminer une représentation paramétrique de (d).

f) Montrer que le vecteur $\vec{u}(1;-1;0)$ est un vecteur normal au plan (SBC). La droite (d) coupe le plan (SBC) en E. Déterminer les coordonnées du point E.

CORRIGE : a) Il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ (−2 ; 4 ; −4) et $\overrightarrow{AD}$ (2 ; 2 ; 1) ne sont pas colinéaires : leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles car −2x(−1)=2 et 4x(½)=2 . Donc les points A,B et D ne sont pas alignés.

b) ABCD est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, soit $x_C - x_D = x_B - x_A$ d'où $x_C = 2$ et on obtient C(2 ; 5 ; −3).

c) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ = −2x2+ 4x2−4x1 = 0. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux. Donc le parallélogramme ABCD est un rectangle.

d) $\overrightarrow{AS}(-4;2;4)$, donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AS}$ =−2x(−4)+ 4x2−4x4 = 0. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont orthogonaux. On a aussi $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AS}$ = 2x(−4)+ 2x2 + 1x4 = 0. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont orthogonaux. Ainsi la droite (AS) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (ABD) donc elle est orthogonale à ce plan. Ainsi le vecteur $\overrightarrow{AS}$ est un vecteur normal au plan (ABD). Une équation du plan (ABD) est $-4x+2y+4z+d=0$. Ce plan contient le point A : $-4\times 2+2(-1)+4\times 0+d=0$ et $d = 10$; d'où une équation de (ABD) : $-2x + y + 2z + 5 = 0$.

e) La droite (d) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AS}$ et passe par D, d'où une représentation paramétrique de (d) :
{ $x = 4 - 4t$; $y = 1 + 2t$; $z = 1 + 4t$ avec $t \in$ IR .

f) On a $\vec{u}.\overrightarrow{SB}=\vec{u}.\overrightarrow{SC}=0$. Donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal $\overrightarrow{SB}$ et $\overrightarrow{SC}$, donc il est normal à (SBC) ; une équation de (SBC) est $x - y + 3 = 0$; les coordonnées de E vérifient le système : { $x = 4 - 4t$; $y = 1 + 2t$; $z = 1 + 4t$ avec $t \in$ IR et $x - y + 3 = 0$. On trouve $t = 1$ et E(0 ; 3 ; 5).