

ENONCE : Soit le repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans l'espace (unité graphique : 1 cm).

On considère les points $A(0 ; 6 ; 0)$, $B(0 ; 0 ; 8)$, $C(4 ; 0 ; 8)$.

1. a) Démontrer que les droites (BC) et (BA) sont orthogonales.
- b) Démontrer que les droites (OC) et (OA) sont orthogonales.
- c) Démontrer que la droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).
- d) Déterminer le volume, en centimètre cube, du tétraèdre OABC .
- e) Démontrer que les quatre points O, A, B et C se trouvent sur une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.
2. A tout réel k de l'intervalle ouvert $]0 ; 8[$, est associé le point $M(0 ; 0 ; k)$. Le plan (Π) qui contient le point M et qui est orthogonal à la droite (OB), rencontre les droites (OC), (AC), (AB) respectivement en N, P, Q.
- a) Déterminer la nature du quadrilatère MNPQ.
- b) La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ?
- c) Pour quelle valeur de k , la droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?
- d) Déterminer MP^2 en fonction de k . Pour quelle valeur de k , la distance PM est-elle minimale ?

CORRIGE

1. a) On a $\vec{BC}(4 ; 0 ; 0)$ et $\vec{BA}(0 ; 6 ; -8)$. On calcule le produit scalaire des vecteurs $\vec{BC}$ et $\vec{BA}$:

$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 4 \times 0 + 0 \times 6 + 0 \times (-8) = 0$ donc les vecteurs sont orthogonaux et les droites (BC) et (BA) sont orthogonales.

b) $\vec{OC} \cdot \vec{OA} = 4 \times 0 + 0 \times 6 + 8 \times 0 = 0$ donc les vecteurs sont orthogonaux et les droites (OC) et (OA) sont orthogonales.

c) $\vec{BC} \cdot \vec{OA} = 4 \times 0 + 0 \times 6 + 0 \times 0 = 0$ donc les vecteurs sont orthogonaux et les droites (BC) et (OA) sont orthogonales. La droite (BC) est orthogonale aux droites (BA) et (OA) du plan (OAB) donc elle est orthogonale au plan (OAB).

d) On considère la base OAB, la hauteur du tétraèdre est alors BC. Le tétraèdre est une pyramide ; son volume est

donné par $\frac{1}{3}(\text{aire de la base})(\text{hauteur})$. Donc $\text{volume}(\text{OABC}) = \frac{1}{3} \times \frac{OA \times OB}{2} \times BC = \frac{6 \times 8 \times 4}{3 \times 2} = 32 \text{ cm}^3$

e) Les plans médiateurs de [OA], [OB] et [BC] sont sécants en un point S équidistant des quatre points O, A, B, C. Donc les quatre points O, A, B et C se trouvent sur une sphère de centre S et de rayon OS. Déterminons les coordonnées de S : le plan médiateur de [OA] a pour vecteur normal $\vec{OA}(0 ; 6 ; 0)$ et passe par le milieu I de [OA], $I(0 ; 3 ; 0)$; une équation de ce plan est $6y + d = 0$; il passe par I, donc $d = -18$; une équation est donc $y - 3 = 0$.

Le plan médiateur de [OB] a pour vecteur normal $\vec{OB}(0 ; 0 ; 8)$ et passe par le milieu J(0 ; 0 ; 4) de [OB]; une équation de ce plan est $z - 4 = 0$. Le plan médiateur de [BC] a pour vecteur normal $\vec{BC}(4 ; 0 ; 0)$ et passe par le milieu K(2 ; 0 ; 8) de [BC]; une équation de ce plan est $x - 2 = 0$. Le point S a pour coordonnées $S(2 ; 3 ; 4)$ et le rayon de la sphère est $OS = \sqrt{29}$.

2. a) Le plan (Π) coupe les plans (OAB) et (OAC) en deux droites parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans, (OA) ; donc $(MQ) \parallel (OA) \parallel (NP)$. De même, (Π) coupe les plans (OBC) et (ABC) en deux droites parallèles à la droite d'intersection de ces deux plans, (BC) ; donc $(MN) \parallel (BC) \parallel (QP)$. De plus, $(BC) \perp (OA)$, donc $(MN) \perp (MQ)$, donc le quadrilatère MNPQ est un rectangle.

b) Le plan (Π) étant orthogonal à la droite (OB), toute droite de ce plan est orthogonale à (OB) ; donc $(PM) \perp (OB)$.

c) Le plan (Π) a pour équation $z = k$. La droite (OC) a pour représentation paramétrique : $\{ x = 4t ; y = 0 ; z = 8t, t \in \mathbb{R} \}$; on obtient $N(k/2 ; 0 ; k)$; $Q(0 ; (24 - 3k)/4 ; k)$ et

$P(k/2 ; (24 - 3k)/4 ; k)$. La droite (PM) est orthogonale à la droite (AC) si $\vec{PM} \cdot \vec{AC} = 0$;

on a $\vec{PM}(-k/2 ; -(24 - 3k)/4 ; 0)$ et $\vec{AC}(4 ; -6 ; 8)$. Donc, $\vec{PM} \cdot \vec{AC} = 0$ si $k = 72/13$.

d) $MP^2 = (13k^2 - 144k + 576)/16 = f(k)$. PM est minimale si MP^2 est minimale ; $f'(k) = 26k - 144$ s'annule pour $k = 72/13$. La fonction f est un polynôme du second degré ; donc PM est minimale si $k = 72/13$ (et si $(PM) \perp (AC)$).

