

**ENONCE :** Dans le plan, on considère le triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH] tel que  $AH = BC = 4$ .

1. En justifiant la construction, placer le point G barycentre du système de points pondérés  $\{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$ .

2. On désigne par M un point quelconque du plan.

a) Montrer que le vecteur  $\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$  est un vecteur de norme 8.

b) Déterminer et construire l'ensemble  $E_1$  des points M du plan tels que  $\|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{V}\|$ .

3. On considère le système de points pondérés  $\{(A, 2); (B, n); (C, n)\}$  où  $n$  est un entier naturel.

a) Montrer que, pour tout  $n$ , le barycentre  $G_n$  de ce système de points existe. Placer  $G_0, G_1, G_2$ .

b) Montrer que le point  $G_n$  appartient au segment [AH].

c) Calculer la distance  $AG_n$  en fonction de  $n$  et déterminer la limite de  $AG_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

d) Soit  $E_n$  l'ensemble des points M du plan tels que  $\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{V}\|$ . Montrer que  $E_n$  est un cercle qui passe par le point A. Préciser le centre et le rayon  $r_n$  de ce cercle.

e) Construire  $E_2$ .

### CORRIGE

1. Comme ABC est isocèle en A, H est le milieu de [BC] et barycentre de  $\{(B, 1), (C, 1)\}$ ; alors G est barycentre du système de points pondérés  $\{(A, 2); (H, 2)\}$ , et donc G est le milieu de [AH].

2. a) On a  $\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MA} - \vec{MC} = \vec{BA} + \vec{CA} = 2\vec{HA}$ ; or  $AH = 4$  donc  $\|\vec{V}\| = 8$ .

b) On a, pour tout point M du plan,  $2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MG}$ , donc l'ensemble  $E_1$  est l'ensemble des points M du plan tel que  $4MG = \|\vec{V}\| = 8$ , soit  $MG = 2$ ; donc l'ensemble  $E_1$  est le cercle de centre G et de rayon 2.

3. a) Le point  $G_n$  existe si la somme des coefficients est non nulle :  $2 + n + n = 2 + 2n > 0$  puisque  $n$  est un entier naturel.  $G_0$  est le point A,  $G_1$  est le point G de la question 1,  $G_2$  est l'isobarycentre de ABC (centre de gravité).

b) Pour tout entier naturel  $n$ , on a H est le barycentre de  $\{(B, n), (C, n)\}$ ; alors  $G_n$  est barycentre du système de points pondérés  $\{(A, 2); (H, 2n)\}$ , donc le point  $G_n$  appartient au segment [AH].

c) On a  $\vec{AG_n} = \frac{n}{2+2n}\vec{AB} + \frac{n}{2+2n}\vec{AC} = \frac{n}{2+2n}(\vec{AB} + \vec{AC})$  et la distance  $AG_n = \frac{n}{2+2n}(2AH) = \frac{4n}{1+n}$  et la limite de

$AG_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  est égale à 4 ( $G_n$  tend vers H).

d) Pour tout entier naturel  $n$ , et pour tout point M du plan, on a

$2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC} = (2+2n)\vec{MG_n}$  donc l'ensemble  $E_n$  est l'ensemble des points M du plan tel que  $(2+2n)MG_n = n\|\vec{V}\| = 8n$ , soit  $MG_n = \frac{4n}{1+n}$ ; donc l'ensemble  $E_n$  est le cercle

de centre  $G_n$  et de rayon  $r_n = \frac{4n}{1+n}$ . Comme  $AG_n = \frac{4n}{1+n}$ ,  $E_n$  passe par le point A.

