ENONCE : On considère deux réels a et b tels que $0 < a < b$, et les deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$;

(rappel : u_{n+1} est la moyenne harmonique de u_n et v_n ; v_{n+1} est la moyenne arithmétique de u_n et v_n).
Le but du problème est de montrer que les deux suites sont adjacentes, de trouver leur limite commune et d'en déduire des approximations de réels par des rationnels.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont strictement positifs.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$.

c) Montrer que, pour tous réels x et y tels que $0 < x < y$, on a $\dfrac{y-x}{2(x+y)} < \dfrac{1}{2}$. En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.

e) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n > 0$, on a $v_n - u_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$.

f) En déduire la limite de $v_n - u_n$.

g) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

h) Montrer que, pour tout entier naturel n, le produit $u_n v_n$ est constant. En déduire la limite des suites (u_n) et (v_n).

i) Donner alors un encadrement de $\sqrt{6}$ par deux rationnels au cent millième près.

CORRIGE : a) Soit (P_n) la propriété : u_n et v_n sont strictement positifs ; (P_0) est vraie ; supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie : $u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $u_{n+1} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}} > 0$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} > 0$; donc pour tout entier n on a u_n et v_n sont strictement positifs.

b) $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} = \dfrac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} = \dfrac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)} > 0$ et donc $v_{n+1} < u_{n+1}$; d'où, $\forall\, n,\ u_n < v_n$.

c) On a $2x > 0$, d'où $0 < y - x < y + x$ d'où $\dfrac{y-x}{y+x} < 1$ d'où $\dfrac{y-x}{2(y+x)} < \dfrac{1}{2}$. Ainsi $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(v_n - u_n)(v_n - u_n)}{2(u_n + v_n)} < \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$. Soit (P_n) la propriété : $v_n - u_n < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$; (P_1) est vraie ; supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) est vraie : $v_{n+1} - u_{n+1} < \dfrac{1}{2}(v_n - u_n) < \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$; donc (P_n) vraie pour tout entier $n \geq 1$. f) Comme $0 < ½ < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$. Donc, par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

g) La suite (u_n) est croissante : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(v_n - u_n)u_n}{u_n + v_n} > 0$; et la suite (v_n) est décroissante : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} < 0$; et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, donc ces deux suites sont adjacentes.

h) $u_{n+1} v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \dfrac{u_n + v_n}{2} = u_n v_n = u_0 v_0 = ab$, donc le produit est constant. Comme les suites sont adjacentes, elles convergent vers la même limite l et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = l^2 = ab$ et donc $l = \sqrt{ab}$.

i) On pose $a = 2$ et $b = 3$; les suites (u_n) et (v_n) convergent vers $\sqrt{6}$; on calcule donc les premiers termes de la suite et dès que la différence $(v_n - u_n)$ est inférieure à 10^{-5} : on a $u_1 = \dfrac{12}{5}$ et $v_1 = \dfrac{5}{2}$; $u_2 = \dfrac{120}{49}$ et $v_2 = \dfrac{49}{20}$; $u_3 = \dfrac{11760}{9602}$ et $v_3 = \dfrac{4801}{1960}$ et $v_3 - u_3 < 10^{-5}$; donc $\dfrac{11760}{4801} < \sqrt{6} < \dfrac{4801}{1960}$.