ENONCE : On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{R}$ par $u_0=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et pour $n\geq 1$, $u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

a) Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=ln(x+\sqrt{1+x^2})$. Calculer $f'(x)$ et en déduire u_0.

b) Calculer u_1.

c) Pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout x de [0 ; 1], comparer x^n et x^{n+1}. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

d) Démontrer que, pour tout x de [0 ; 1], $1\leq\sqrt{1+x^2}\leq\sqrt{2}$.

e) En déduire que, pour tout entier $n\geq 1$, $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}$.

f) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

CORRIGE : a) On a $f'(x)=\dfrac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ donc f est une primitive de $x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; ainsi $u_0=f(1)-f(0)=ln(1+\sqrt{2})$. b) On a $u_1=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\sqrt{2}-1$.

c) Pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout x de [0 ; 1], $0\leq x\leq 1$ et en multipliant les termes par la quantité positive x^n, on obtient $0\leq x^{n+1}\leq x^n$; en utilisant la propriété : si, sur [*a, b*] on a *f(x) < g(x)* alors $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$;on obtient $0\leq\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\leq\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\int_0^1\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx\leq\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ soit $u_{n+1}\leq u_n$ et la suite (u_n) est décroissante.

d) Pour tout x de [0 ; 1], on a $0\leq x\leq 1$ implique $0\leq x^2\leq 1$ d'où $1\leq x^2+1\leq 2$, d'où (par la croissance de la fonction racine carrée) $1\leq\sqrt{1+x^2}\leq\sqrt{2}$.

e) On a donc $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\leq 1$; pour tout x de [0 ; 1] et tout entier $n\geq 1$, $\frac{x^n}{\sqrt{2}}\leq\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\leq x^n$, d'où $\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{2}}dx\leq\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx\leq\int_0^1 x^n dx$, d'où $\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)\sqrt{2}}\right]_0^1\leq u_n\leq\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$, d'où $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}$.

f) En utilisant le théorème des gendarmes et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, on obtient que (u_n) converge vers 0.