ENONCE : On considère la fonction f définie sur]0 ; + ∞[par $f(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en +∞.
2. Calculer la dérivée de f et déterminer son sens de variations sur]0 ; + ∞[.
3. Tracer la représentation graphique de f dans le plan.
4. On pose, pour $p\geq 1$, $I_p=\int_1^{e^2}\dfrac{(\ln x)^p}{x^2}dx$. A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur exacte de I_1.
5. Montrer que, pour $p\geq 1$, $I_{p+1}=-\dfrac{2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_p$. En déduire les valeurs exactes de I_2, I_3, I_4.

CORRIGE :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(x))^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ car $f(x)=\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}=0$.

2. $f'(x)=\dfrac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x^2}(2-\ln x)$ s'annule en 1 et en e^2 d'où le tableau de variations sur]0 ; + ∞[:

x	0		1		e^2		+∞
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	+∞	↘	0	↗	$4e^{-2}$	↘	0

4. On pose $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $v(x)=\dfrac{-1}{x}$; d'où $I_1=\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{x^2}dx=\left[\dfrac{-\ln x}{x}\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\dfrac{-1}{x^2}dx=\dfrac{-2}{e^2}-\left[\dfrac{1}{x}\right]_1^{e^2}=1-\dfrac{3}{e^2}$.

5. On a, pour $p\geq 1$, $I_{p+1}=\int_1^{e^2}\dfrac{(\ln x)^{p+1}}{x^2}dx=\left[\dfrac{-(\ln x)^{p+1}}{x}\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\left(\dfrac{-1}{x}(p+1)\dfrac{1}{x}(\ln x)^p\right)dx=\dfrac{-2^{p+1}}{e^2}+(p+1)I_p$.

D'où $I_2=\dfrac{-2^{1+1}}{e^2}+(1+1)I_1=2-\dfrac{10}{e^2}$, $I_3=\dfrac{-2^{2+1}}{e^2}+(2+1)I_2=6-\dfrac{38}{e^2}$, $I_4=\dfrac{-2^{3+1}}{e^2}+(3+1)I_3=24-\dfrac{168}{e^2}$.