

ENONCE : Pour n entier naturel non nul, soit f_n la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$. On considère

un réel a de I et on pose, pour tout entier naturel n , $I_n(a) = \int_0^a f_n(x) dx$.

1. Calculer $I_0(a)$.

2. a) Montrer que, pour tout x de I et pour tout n entier naturel non nul : $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$.

b) En déduire que, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a) - I_{n-1}(a) = -\frac{a^n}{n!} e^{-a}$.

c) En déduire que, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}$.

3. Dans cette question, on pose $a = 1$. On appelle (u_n) la suite numérique définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ par :

$$u_n = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) e^{-1} = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , et pour tout x de $[0 ; 1]$: $f_n(x) \leq \frac{1}{n!} x^n$.

b) En déduire l'encadrement pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$ puis la limite de u_n .

c) Déduire enfin que $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots$

CORRIGE : 1. $I_0(a) = \int_0^a e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^a = 1 - e^{-a}$ (car $0! = 1$ et $f_0(x) = e^{-x}$).

2. a) Pour tout x de I et pour tout n entier naturel non nul, on a : $f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} + \frac{x^n}{n!} (-e^{-x}) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$ et $f_n(0) = 0$.

b) D'où, pour tout n entier naturel non nul :

$$I_n(a) - I_{n-1}(a) = \int_0^a (f_n(x) - f_{n-1}(x)) dx = \int_0^a (-f_n'(x)) dx = [-f_n(x)]_0^a = -\frac{a^n}{n!} e^{-a}.$$

c) D'où, pour tout n entier naturel non nul : $I_n(a) = I_{n-1}(a) - \frac{a^n}{n!} e^{-a} = I_{n-2}(a) - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} e^{-a} - \frac{a^n}{n!} e^{-a} = \dots =$

$$I_0(a) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a} = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} \right) e^{-a}.$$

3. a) Pour tout entier naturel n , et pour tout x de $[0 ; 1]$: $0 \leq x \leq 1$ entraîne $0 \leq e^x \leq e$ entraîne $0 \leq e^{-x} \leq e^{-1} < 1$ et en multipliant les termes par la quantité positive $\frac{1}{n!} x^n$, on obtient $0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n!} x^n$.

b) Donc, en utilisant la propriété : si, sur $[a, b]$ on a $f(x) < g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$; donc pour tout entier

naturel n : $0 \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx$; or $\int_0^1 \frac{x^n}{n!} dx = \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)!}$; on a, pour tout entier naturel n : $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{n+1}$, donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$ puis, par le théorème des gendarmes, la limite de u_n est 0.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) e^{-1} \right) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) e^{-1} = 1$ et donc

$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots$ ce qui permet d'obtenir des approximations de e par des rationnels :

$e \approx \frac{1957}{720}$ à 10^{-3} près ; $e \approx \frac{685}{252}$ à 10^{-4} près ...