CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 7 TERMINALE STD2A

EXERCICE 1 : Un paramétrage puis une équation cartésienne de l'ellipse définie par :

a) le centre est le point $\Omega(2 ; -1)$ et de demi axes $a = 5$ et $b = 2$:

$$\begin{cases} x(t)=2+5\times\cos(t) \\ y(t)=-1+2\times\sin(t) \end{cases} \text{ et } \frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{4}=1.$$

b) le centre est A(7 ; 4), l'ellipse passe par B(7 ; 1) et par C(2 ; 4) :

$$\begin{cases} x(t)=7+5\times\cos(t) \\ y(t)=4+3\times\sin(t) \end{cases} \text{ et } \frac{(x-7)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{9}=1.$$

EXERCICE 2 : 1. L'ellipse (E) d'équation cartésienne $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{2}=1$ a pour centre $\Omega(-1 ; 3)$ et pour demi axes $a = 2$ et $b = \sqrt{2}$.

2. Les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse (E) et de la droite d'équation $y = x + 2$ vérifient le système :

$\begin{cases} \frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{2}=1 \\ y=x+2 \end{cases}$. On remplace y par $x + 2$ dans la première équation : $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(x+2-3)^2}{2}=1$ équivaut à

$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{(x-1)^2}{2}=1$ équivaut à $\frac{(x+1)^2+2(x-1)^2}{4}=1$ équivaut à

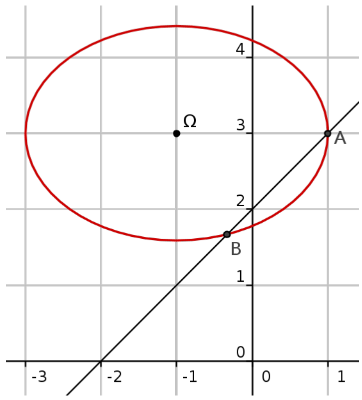
$(x + 1)^2 + 2(x - 1)^2 = 4$ équivaut à $x^2 + 2x + 1 + 2(x^2 - 2x + 1) = 4$

équivaut à $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times3\times(-1) = 16 > 0$, donc l'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+4}{2\times3} = 1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-6}{2\times3} = \frac{-2}{3}$.

Les ordonnées : $y_1 = x_1 + 2 = 3$ et $y_2 = x_2 + 2 = \frac{4}{3}$.

Les deux points d'intersection sont A(1 ; 3) et B($\frac{-2}{3}$; $\frac{4}{3}$).



BONUS : Tracé de l'ellipse et la droite dans un repère du plan :

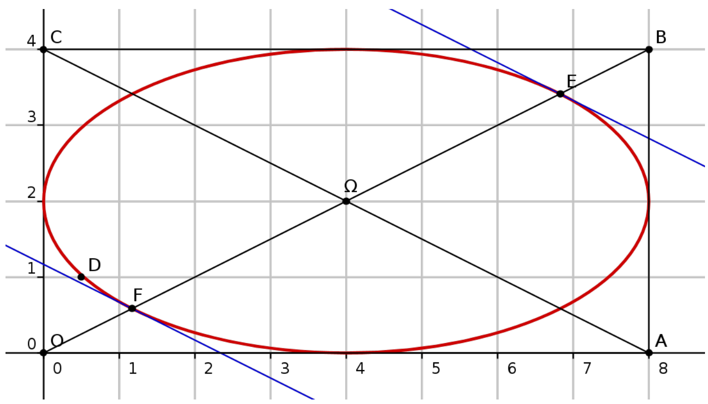
EXERCICE 4 : Dans le repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan, on considère les points A(8 ; 0) et C(0 ; 4).
Le point B tel que OABC est un rectangle. Ce rectangle est circonscrit à une ellipse.

1. Le centre de l'ellipse set le centre du rectangle, soit $\Omega(4 ; 2)$ et les demi axes de cette ellipse sont $a = 4$ et $b = 2$ (moitié de la longueur et la largeur du rectangle).

2. Le point D(0,5 ; 1) n'est pas un point de l'ellipse. Pour le savoir, on détermine l'équation cartésienne de cette ellipse : $\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$. On remplace x et y par les coordonnées de D : $\frac{(0{,}5-4)^2}{16}+\frac{(1-2)^2}{4} =$

$\frac{(-3{,}5)^2}{16}+\frac{(-1)^2}{4} = \frac{12{,}25}{16}+\frac{1}{4} = \frac{12{,}25+4}{16} = \frac{16{,}25}{16} \neq 1$. Les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation de l'ellipse.

BONUS : Soient E et F les points d'intersection de l'ellipse et de la droite (OB). On admet que les tangentes à l'ellipse en ces points E et F sont parallèles à la droite (AC). Tracer ces tangentes.



EXERCICE 3 : On cherche à construire point par point l'ellipse de centre O et de demi axes $a = 5$ et $b = 2$:
1. Tracé des cercles C_1 et C_2 de centre O et de rayons respectifs 5 et 2.
2. Les points A, B et D sur le cercle C_1 et d'abscisses respectives 1, 2 et 4.
3. Les points A', B' et D' sur le cercle C_2 tel que A' est sur [OA], B' sur [OB] et D' sur [OD].
4. Les points M_1 , M_2 , M_3 intersection des parallèles aux axes passant par A et A',
puis B et B',
puis D et D'. Les points M_1 , M_2 , M_3 sont sur l'ellipse de centre O et d'axe a et b.
5. A l'aide des symétries, on termine la construction de l'ellipse.
6. On cherche à construire des tangentes à l'ellipse :
a) La tangente à C_1 au point D. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en N. La droite (NM_3) est tangente à l'ellipse en M_3 . Cette tangente coupe l'axe des ordonnées en P.
b) Par symétrie, tracé de trois autres tangentes à l'ellipse.