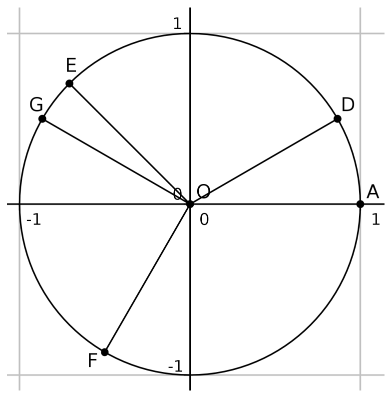
CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 5 TERMINALE STD2A

EXERCICE 1 : 1. Sur le cercle trigonométrique ci-contre, on place les points D, E, F et G définis par

$\widehat{AOD} = \dfrac{\pi}{6}$ rad ; $\widehat{AOE} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad ;

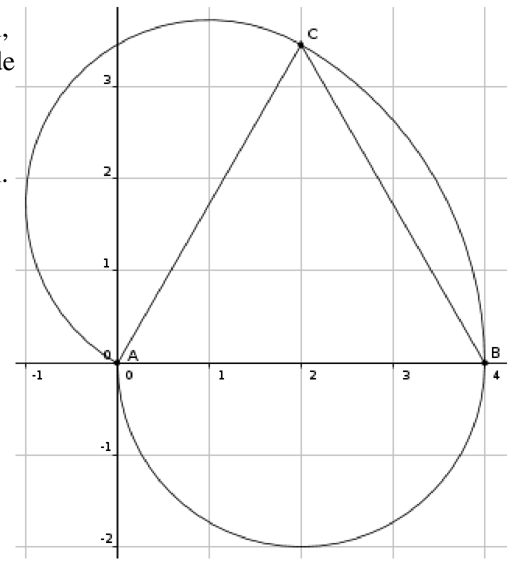
$\widehat{AOF} = \dfrac{-2\pi}{3}$ rad ; $\widehat{AOG} = \dfrac{5\pi}{6}$ rad ;



2. Le tableau complété :

Angle α	$\widehat{AOD}$	$\widehat{AOE}$	$\widehat{AOF}$	$\widehat{AOG}$
Angle en degré	30°	135°	120°	150°
$\cos(\alpha)$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{-\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$
$\sin(\alpha)$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$

EXERCICE 2 : Sur la figure ci-contre, le triangle ABC est équilatéral, l'arc de cercle est de centre A et situé entre B et C, le demi-cercle est de diamètre [AC]. On admet que C(2 ; 2 $\sqrt{3}$).



1. Un paramétrage de chaque arc de cercle : Le centre est le point A(0 ; 0), le rayon est AB 4, et l'angle décrit de 0 à 60°, soit $\dfrac{\pi}{3}$ radian.

Arc BC : $\begin{cases} x(t)=4\cos(t) \\ y(t)=4\sin(t) \end{cases}$, $t \in [0 ; \dfrac{\pi}{3}]$.

Demi-cercle de diamètre [AC] : le centre du cercle est le milieu de [AC] de coordonnées (1 ; $\sqrt{3}$) ; l'angle varie de 60° à 180 + 60°, soit $\dfrac{\pi}{3}$ à $\dfrac{4\pi}{3}$ rad. Donc $\begin{cases} x(t)=1+2\cos(t) \\ y(t)=\sqrt{3}+2\sin(t) \end{cases}$, $t \in [\dfrac{\pi}{3} ; \dfrac{4\pi}{3}]$.

2. Tracé de l'arc de cercle : $\begin{cases} x(t)=2+2\cos(t) \\ y(t)=2\sin(t) \end{cases}$, $t \in [-\pi ; 0]$: le centre est le point D(2 ; 0) et le rayon = 2.

EXERCICE 3 : On considère les équations $x^2 + y^2 - 8x + 14y + 65 = 0$ et $x^2 + y^2 + 8x - 14y + 40 = 0$.

1. $x^2 + y^2 - 8x + 14y + 65 = 0$ équivaut à $(x - 4)^2 - 16 + (y + 7)^2 - 49 + 65 = 0$ équivaut à $(x - 4)^2 + (y + 7)^2 = 0$; donc cette équation correspond au seul point de coordonnées (4 ; – 7).

$x^2 + y^2 + 8x - 14y + 40 = 0$ équivaut à $(x + 4)^2 - 16 + (y - 7)^2 - 49 + 40 = 0$ équivaut à $(x + 4)^2 + (y - 7)^2 = 25 = 5^2$; donc cette équation est celle du cercle de centre Ω(– 4 ; 7) et de rayon 5.

EXERCICE 4 : 1. Dans le repère ci-dessous, tracer la droite (AB) tel que A(1 ; 4) et B(4 ; 1) et le cercle (C) de centre $\Omega(2\ ;-1)$ et passant par le point $D(-1\ ;0)$.

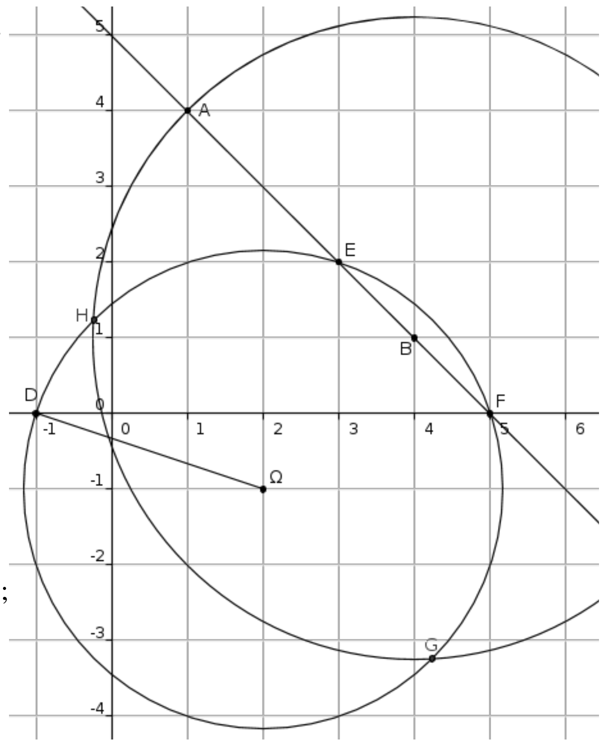
2. Le rayon du cercle est égal à $\Omega D = \sqrt{(x_\Omega - x_D)^2 + (y_\Omega - y_D)^2} = \sqrt{(2-(-1))^2+(-1-0)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$.

Une équation cartésienne du cercle (C) est $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$.

Une équation de la droite (AB) est de la forme $y = ax + b$ avec

$a = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \dfrac{4-1}{1-4} = -1$ et $b = y_A - ax_A = 4-(-1)1 = 5$;

donc l'équation de (AB) est $y = -x + 5$.



3. Les coordonnées des éventuels points d'intersection de la droite et du cercle vérifient le système d'équations :

$\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2=10\\ y=-x+5\end{cases}$. On remplace y par $-x+5$ dans la première équation : $(x-2)^2 + (-x+5+1)^2 = 10$ équivaut à

$(x-2)^2 + (-x+6)^2 = 10$ équivaut à

$x^2-4x+4+x^2-12x+36 = 10$ équivaut à

$2x^2-16x+40 = 10$

équivaut à $2x^2-16x+30 = 0$.

Le discriminant est

$\Delta = b^2-4ac = (-16)^2 - 4\times2\times30 = 16 = 4^2 > 0$, donc

l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{16+4}{2\times2} = 5$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{16-4}{2\times2} = 3$;

les ordonnées sont $y_1 = -5+5 = 0$ et $y_2 = -3+5 = 2$.

Les deux points d'intersection sont E(3 ; 2) et F(5 ; 0).

BONUS : Le rayon du cercle (C') est

$AB = \sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2} = \sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2} = \sqrt{(-3)^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

L'équation cartésienne de ce cercle est $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 18$.

Les coordonnées des éventuels points d'intersection du cercle (C) et du cercle (C') de centre B passant par A vérifient le système d'équations :

$\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2=10\\ (x-4)^2+(y-1)^2=18\end{cases}$; on développe les expressions : $\begin{cases}x^2-4x+4+y^2+2y+1=10\\ x^2-8x+16+y^2-2y+1=18\end{cases}$ équivaut à

$\begin{cases}x^2-4x+y^2+2y-5=0\\ x^2-8x+y^2-2y-1=0\end{cases}$; on fait l'égalité des deux équations : $x^2-4x+y^2+2y-5 = x^2-8x+y^2-2y-1$; on simplifie : $4x+4y-4 = 0$, soit $x+y-1 = 0$, soit $y = -x+1$; on remplace y par $-x+1$ dans une des équations de cercle : $(x-4)^2 + (-x+1-1)^2 = 18$ équivaut à $(x-4)^2 + (-x)^2 = 18$ équivaut à $x^2-8x+16+x^2 = 18$ équivaut à $2x^2-8x-2 = 0$. On simplifie par 2 : $x^2-4x-1 = 0$.

Le discriminant est $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2 - 4\times1\times(-1) = 20 > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4+\sqrt{20}}{2} = \dfrac{4+2\sqrt{5}}{2} = 2+\sqrt{5}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4-\sqrt{20}}{2} = \dfrac{4-2\sqrt{5}}{2} = 2-\sqrt{5}$;

les ordonnées sont $y_1 = -(2+\sqrt{5})+1 = -1-\sqrt{5}$ et $y_2 = -(2-\sqrt{5})+1 = -1+\sqrt{5}$.

Les deux points d'intersection sont $G(2+\sqrt{5}\ ;-1-\sqrt{5})$ et $H(2-\sqrt{5}\ ;-1+\sqrt{5})$.