CORRIGÉ DEVOIR SURVEILLÉ N° 1 TERMINALE STD2A

EXERCICE 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$.

1. La dérivée de cette fonction f est $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$.

2. Pour étudier les variations de cette fonction sur $\mathbb{R}$, on cherche le signe de la dérivée :
on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times3\times(-4) = 64 = 8^2 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-8}{2\times3} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+8}{2\times3} = 2$.

La dérivée est du signe de $a = 3 > 0$ sur $]-\infty; \frac{-2}{3}] \cup [2 ; +\infty[$ et est négative sur $[\frac{-2}{3} ; 2]$.

D'où le tableau de variations :

$f(\frac{-2}{3}) = (\frac{-2}{3})^3 - 2(\frac{-2}{3})^2 - 4(\frac{-2}{3}) + 3 = \frac{121}{27}$ et

$f(2) = 2^3 - 2\times2^2 - 4\times2 + 3 = -5$.

x	$-\infty$		$\frac{-2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{121}{27}$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

3. La fonction f admet un maximum local égal à $\frac{121}{27}$ atteint en $x = \frac{-2}{3}$ et admet un minimum local égal à -5 atteint en $x = 2$.

4. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse -1 est égal à $f'(-1) = 3$.

EXERCICE 2 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - 8 + \frac{4}{x}$.

1. La dérivée de cette fonction f est égale à $f'(x) = 1 + \frac{-4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$.

2. Le signe de cette dérivée est celui du numérateur car $x^2 > 0$. $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ qui s'annule en 2 et -2 ;
ce polynôme est positif sur $]-\infty; -2] \cup [2 ; +\infty[$ et est négatif sur $[-2 ; 2]$.

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-12	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

3. La fonction f admet un maximum local égal à -12 atteint en $x = -2$ et admet un minimum local égal à -4 atteint en $x = 2$.

4. L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $x - 8 + \frac{4}{x} = 0$; on met au même dénominateur : $\frac{x^2-8x+4}{x} = 0$. Un quotient est nul si le numérateur est nul, soit $x^2 - 8x + 4 = 0$;
on calcule le discriminant :
$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times1\times4 = 48 > 0$, donc il y a deux solutions :
$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8+\sqrt{48}}{2} = \frac{8+4\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8-\sqrt{48}}{2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{2} = 4 - 2\sqrt{3}$.

Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $4 + 2\sqrt{3}$ et $4 - 2\sqrt{3}$.

EXERCICE 3 : On considère un rectangle ABCD tel que AB = 6 cm et AD = 8 cm.
On place un point M sur [AB] et le point N sur [BC] tel que BN = AM = x.

1. Comme AM = x et que AB = 6, alors $x \in [0 ; 6]$.

2. L'aire du triangle BNM est égale à $\frac{\text{BM}\times\text{BN}}{2} = \frac{(6-x)x}{2} = \frac{6x-x^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + 3x$.

3. Pour trouver l'aire maximale de ce triangle, on étudie les variations de cette fonction g sur l'intervalle $[0 ; 6]$:
sa dérivée est égale à $g'(x) = \frac{-2x}{2} + 3 = -x + 3$ qui s'annule pour $x = 3$.

D'où le tableau de variations :

x	0		3		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$4{,}5$	$\searrow$	0

La fonction admet un maximum égal à $g(3) = 4{,}5$ atteint en $x = 3$.